Θέματα Μαθηματικών Γ΄ Λυκείου

Θέμα Α

Α1. Να διατυπώσετε το θεώρημα της Μέσης Τιμής και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

Μονάδες 6

Α2. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ.
Αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

Μονάδες 9

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ, τότε $f'(x)>0$ στο εσωτερικό του Δ.

β. Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $f'(x)=0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, τότε η f είναι σταθερή στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

γ. Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Μέσης Τιμής σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$, τότε υπάρχει τουλάχιστον μια εφαπτομένη της C_f σε ένα σημείο $(\xi, f(\xi))$ με $\xi\in(\alpha,\beta)$ η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία ΑΒ όπου $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$.

δ. Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες και συνεχείς σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x)=g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε $f(x)=g(x)$ για κάθε $x\in\Delta$.

ε. Αν για μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ ισχύει $f'(x)<0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

Μονάδες 2 × 5

Θέμα Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln x,\ x>0$ και $g(x)=\dfrac{x}{1-x},\ x\neq 1$.

Β1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f\circ g$.

Μονάδες 5

Β2. Αν $h(x)=(f\circ g)(x)=\ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right),\ x\in(0,1)$, τότε να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

Μονάδες 6

Β3. Αν $\varphi(x)=h^{-1}(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1},\ x\in\mathbb{R}$, τότε να μελετήσετε τη συνάρτηση φ ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της φ.

Μονάδες 7

Β4. Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ.

Μονάδες 7

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f(1)=-1$,
- $f'(x)\cdot e^{x+f(x)}=2x-x^2$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Γ1. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

Μονάδες 7

Στη συνέχεια, για $f(x)=2\ln x-x,\ x>0$:

Γ2. να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία,

Μονάδες 4

Γ3. να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f(e^x+1)+f\left(\frac{1}{x}\right)=f(e^x)+f\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(0,+\infty)$.

Μονάδες 8

Γ4. Για κάθε $x>0$ να αποδείξετε ότι:

$$f(\eta\mu x+3)+f(x+2)>f(x+3)+f(\eta\mu x+2).$$

Μονάδες 6

www.best4edu.gr

info@best4edu.gr

22260 55525

6972531296

best4edu

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\ln(1+x)>\dfrac{x}{x+1}$ για κάθε $x>0$.

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και ότι το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το διάστημα $(0,1)$.

Μονάδες 5

Δ3. Να αποδείξετε ότι $f(x)>2^{f(x)}-1$ για κάθε $x>0$.

Μονάδες 5

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f(x)\cdot\sqrt{1-f^2(-\ln x)}=f(-\ln x)\cdot\sqrt{1-f^2(x)}$$

έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα $(0,1)$.

Μονάδες 6

Δ5. Αν F μια αρχική της f στο διάστημα $(0,+\infty)$ με $F(e)=e\ln 2$, τότε να αποδείξετε ότι:

$$F(1)>\ln 2.$$

Μονάδες 4

28/3/2021

www.best4edu.gr
info@best4edu.gr
22260 55525
6972531296
best4edu